# Bab 1

# Peubah Acak

## 1.1 Konsep Dasar Peubah Acak

**Definisi**
Peubah acak adalah suatu fungsi dari ruang contoh ke bilangan nyata, $f : S \to R$

Contoh peubah acak:

- Jika $X$ adalah peubah acak banyaknya sisi muka yang muncul pada pelemparan tiga mata uang seimbang, maka $X = \{0, 1, 2, 3\}$.
- Suatu percobaan saling bebas, melempar satu koin mata uang dengan peluang munculnya sisi muka sebesar $p$, dan dilakukan terus sampai diperoleh sisi belakang (artinya, percobaan dihentikan jika diperoleh sisi belakang). Jika $X$ adalah banyaknya percobaan dilakukan maka tentukan $X$.
- Tiga bola diambil secara acak dari wadah yang berisi 3 bola putih, 3 bola merah, dan 5 bola hitam. Anggaplah ini merupakan permainan, dan Anda dianggap menang 1 dollar untuk setiap bola putih yang terpilih, dan kalah 1 dollar untuk setiap bola merah yang terpilih. Jika $X$ adalah peubah acak total uang yang diperoleh dari permainan ini, tentukan $X$.

## 1.2 Fungsi Sebaran

**Definisi**
Fungsi sebaran kumulatif (*cummulative distribution function*=cdf) atau sering disebut sebagai fungsi sebaran $F$ dari peubah acak $X$ didefinisikan untuk sembarang nilai $b$, $-\infty < b < \infty$, adalah

$$F(b) = P(X \leq b)$$

Dengan kata lain, $F(b)$ adalah peluang nilai peubah acak $X$ lebih kecil atau sama dengan $b$. Beberapa properti dari fungsi sebaran $F$ adalah

1. $F$ adalah fungsi tidak turun, berarti jika $a < b$ maka $F(a) \leq F(b)$.
2. $F(b) = 1$ untuk $b \to \infty$.
3. $F(b) = 0$ untuk $b \to -\infty$.
4. $F$ adalah kontinu kanan.

Berdasarkan properti dari fungsi sebaran $F$, maka untuk menghitung peluang $X < b$ dapat dilakukan dengan

$$\begin{aligned} P(X < b) &= P\left(\lim_{n\to\infty}\left\{X \leq b - \frac{1}{n}\right\}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(X \leq b - \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} F\left(b - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

**Contoh**
Diketahui fungsi sebaran peubah acak $X$ sebagai berikut:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

Gambarkan grafik $F(x)$ dan hitung $P(X < 3)$, $P(X = 1)$, $P(X > \frac{1}{2})$, dan $P(2 < X \leq 4)$.

### 1.3 Sebaran Diskret

**Definisi**
Peubah acak dimana semua nilai yang mungkin adalah tercacah, maka peubah acak disebut sebagai peubah acak diskret.

Untuk peubah acak $X$ diskret, dapat ditentukan **fungsi massa peluang** atau disingkat **fmp**, $p(a)$, dari peubah acak $X$, yaitu

$$p(a) = P(X = a)$$

Untuk setiap nilai peubah acak $X = \{x_1, x_2, ...\}$, maka berlaku

$$\begin{aligned} p(x_i) &\leq 0 \text{ untuk setiap } i = 1, 2, ... \\ p(x) &= 0 \text{ untuk nilai } x \text{ lainnya} \\ \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) &= 1 \end{aligned}$$

Berikut adalah contoh fungsi massa peluang dari peubah acak $X$

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p(x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

Fungsi sebaran dari peubah acak $X$ tersebut adalah

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

yang merupakan **fungsi tangga**.

**Contoh**
Diketahui fungsi massa peluang peubah acak $X$ sebagai berikut:

$$p(i) = \frac{c\lambda^i}{i!} \text{ untuk } i = 0, 1, 2, ... \text{ dan } \lambda > 0$$

Dapatkan $P(X = 0)$ dan $P(X > 2)$.

**Contoh**
Diketahui fungsi massa peluang dari peubah acak $X$

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

Tentukan fungsi sebaran $F(X)$.

## 1.4 Nilai Harapan Sebaran Diskret

**Definisi**
Jika $X$ adalah peubah acak diskret yang mempunyai fungsi massa peluang $p(x)$, maka **nilai harapan** dari $X$, dinotasikan dengan $E(X)$, didefinisikan sebagai

$$E(X) = \sum_{x;p(x)>0} xp(x)$$

Sebagai contoh, jika $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$, maka

$$E(X) = 0p(0) + 1p(1) = 0(\frac{1}{2}) + 1(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

yang merupakan rata-rata dari kemunculan 0 dan 1. Namun demikian, jika

$$p(0) = \frac{1}{3} \text{ dan } p(1) = \frac{2}{3}$$

maka

$$E(X) = 0p(0) + 1p(1) = 0(\frac{1}{3}) + 1(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$$

dan ini merupakan rata-rata terboboti dari kemunculan 0 dan 1.

**Corollary**
Jika $X$ adalah peubah acak dan $a$ dan $b$ adalah konstanta, maka

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

## 1.5 Ragam

**Definisi**
Jika $X$ adalah adalah peubah acak dengan nilai tengah $E(X) = \mu$, maka **ragam** atau **variance** dari $X$, dinotasikan dengan $Var(X)$, didefinisikan sebagai

$$Var(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

**Corollary**
Jika $X$ adalah peubah acak dan $a$ dan $b$ adalah konstanta, maka

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

**Standard deviasi** dari peubah acak $X$, dinotasikan dengan $SD(X)$ didefinisikan sebagai

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)}$$

## 1.6 Sebaran Kontinu

**Definisi**
Peubah acak adalah suatu fungsi dari ruang contoh $S$ ke $R$ (himpunan bilangan nyata)

- Peubah acak $X$ bersifat **diskret** jika $F(x)$ adalah fungsi tangga.
- Peubah acak $X$ bersifat **kontinu** jika $F(x)$ adalah fungsi kontinu dari $x$.

Dengan kata lain, $X$ disebut peubah acak kontinu jika ada fungsi non-negatif $f$ yang didefinisikan untuk semua bilangan nyata $x \in (-\infty, \infty)$, bahwa untuk setiap bilangan nyata $B$ berlaku

$$P(X \in B) = \int_B f(x)_{dx} \tag{1.1}$$

Fungsi $f$ disebut sebagai **fungsi kepekatan peluang (fkp)** atau *probability density function (pdf)* dari peubah acak $X$. Persamaan (1.1) menyatakan bahwa peluang $X$ berada pada daerah $B$ dapat diperoleh dengan mengintegralkan pdf pada daerah $B$. Berdasarkan definisi tentang peluang, maka

$$P\{X \in (-\infty, \infty)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)_{dx} = 1$$

Dengan demikian, untuk sembarang $B = [a, b]$, maka persamaan (1.1) menjadi

$$P(X \in B) = P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)_{dx} \tag{1.2}$$

Jika $a = b$ pada persamaan (1.2), maka diperoleh

$$P(X = a) = \int_{a}^{a} f(x)_{dx} = 0.$$

Dengan demikian, untuk peubah acak kontinu, berlaku

$$P(X < a) = P(X \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)_{dx}.$$

Sebagai contoh, misalkan $X$ adalah peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & , \text{utk } 0 < x < 2 \\ 0 & , \text{utk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

a) Berapa nilai C?

b) Tentukan $P(X > 1)$

## 1.7 Nilai Harapan Sebaran Kontinu

**Definisi**

Jika $X$ adalah peubah acak kontinu yang mempunyai fungsi kepekatan peluang $f(x)$, maka **nilai harapan** dari $X$ adalah

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)_{dx}$$

Sebagai contoh, dapatkan $E[X]$ jika diketahui fungsi kepekatan peluang

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \text{utk } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{utk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

**Proposisi**

Nilai harapan dari peubah acak $Y = g(X)$ adalah

$$\begin{aligned} E[Y] = E[g(X)] &= \sum_{x \in X} g(x)p(x), \text{ bila p.a } X \text{ diskret} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)_{dx}, \text{ bila p.a } X \text{ kontinu} \end{aligned}$$

Sebagai contoh, dapatkan $E[e^X]$ jika diketahui fungsi kepekatan peluang

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, utk } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{, utk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

## 1.8 Peubah Acak Ganda

Misalkan terdapat suatu tindakan pelemparan sekeping mata uang seimbang sebanyak tiga kali. Diketahui peubah acak $X$ adalah banyaknya sisi **M** yang muncul dari 3 lemparan, dan $Y$ adalah peubah acak banyaknya sisi **M** yang muncul dari 2 lemparan terakhir. Maka fungsi massa peluang bersama $X$ dan $Y$ dapat dituliskan sebagai

$$P[(X,Y) = (x,y)] = f(x,y) = \begin{cases} 1/8 & \text{, utk } (x,y) = (0,0),(1,0),(2,2),(3,2) \\ 2/8 & \text{, utk } (x,y) = (1,1),(2,1) \\ 0 & \text{, utk } (x,y) \text{ lainnya} \end{cases}$$

atau dapat juga dituliskan dalam bentuk tabel $f(x,y)$ berikut:

| $x\backslash y$ | 0 | 1 | 2 | $f(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/8 | 0 | 0 | 1/8 |
| 1 | 1/8 | 2/8 | 0 | 3/8 |
| 2 | 0 | 2/8 | 1/8 | 3/8 |
| 3 | 0 | 0 | 1/8 | 1/8 |
| $f(y)$ | 2/8 | 4/8 | 2/8 | 1 |

**Definisi**
Peubah acak ganda-n, yaitu $(X_1, ..., X_n)$, adalah suatu fungsi dari ruang contoh $S$ ke ruang bilangan nyata berdimensi-$n$ ($R^n$), untuk $n$=1,2,3,...

Jadi peubah acak ganda-2 diskret $(X, Y)$ merupakan suatu fungsi $R^2$ ke $R$ berikut:

$$(X,Y) = \{(x,y); f(x,y) > 0\}$$

Dari contoh peubah acak $X$ dan $Y$ sebelumnya, berapa nilai $P(X + Y = 2)$, $P(X + Y > 1)$, $P(X > Y)$, $P(XY < 1)$, dan $P(1 < X + Y < 2)$?

Nilai harapan dari suatu fungsi dari peubah acak ganda-2 diskret $(X, Y)$ adalah

$$E[g(X,Y)] = \sum_{(x,y)\in(X,Y)} g(x,y).f(x,y)$$

Contoh, hitung $E[g(X, Y)]$ jika $g(X, Y) = XY$.

**Teorema**
Ambil peubah acak diskret $(X, Y)$ dengan fmp $f(x, y)$ untuk $(x, y) \in R^2$.

- Fmp marginal dari peubah acak $X$ adalah

$$f(x) = P(X = x) = \sum_{y \in \{y; f(x,y)>0\}} f(x, y), \text{ untuk } x \in R$$

- Fmp marginal dari peubah acak $Y$ adalah

$$f(y) = P(Y = y) = \sum_{x \in \{x; f(x,y)>0\}} f(x, y), \text{ untuk } y \in R$$

**Definisi**
Kovarians dari peubah acak $(X, Y)$ adalah

$$\begin{aligned} cov(X, Y) &= E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Bila $X = Y$, maka $cov(X, X) = E[X - E(X)]^2 = var(X)$.

**Definisi**
Koefisien korelasi dari peubah acak $(X, Y)$ adalah

$$\begin{aligned} \rho(X, Y) &= \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{var(X)}\sqrt{var(Y)}} \\ &= \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{var(X)var(Y)}} \end{aligned}$$

dimana $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$ atau $\mid \rho(X, Y) \mid \leq 1$. (BUKTIKAN!)

## 1.9 Peubah Acak Kontinu Ganda-2

**Definisi**
Ambil peubah acak kontinu ganda-2 $(X, Y)$. Suatu fungsi $f(x, y) \leq 0$ untuk $(x, y) \in R^2$ disebut **fungsi kepekatan peluang (fkp) bersama** dari peubah acak $(X, Y)$ jika untuk setiap himpunan $A \subseteq R^2$ berlaku

$$P[(X, Y) \in A] = \int\int_{(x,y) \in A} f(x, y)_{dxdy}$$

Bila $A = R^2$ maka

$$\begin{aligned} P[(X, Y) \in A] &= \int\int_{(x,y) \in R^2} f(x, y)_{dxdy} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)_{dxdy} = 1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Fkp marjinal dari peubah acak $X$ adalah

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)_{dy}, \text{ untuk } x \in R$$

Fkp marjinal dari peubah acak $Y$ adalah

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)_{dx}, \text{ untuk } y \in R$$

Contoh, diketahui peubah acak kontinu $(X,Y)$ dengan fkp sebagai berikut

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & \text{, utk } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{, utk } (x,y) \text{ lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah $P(X > Y)$, $P(Y >\mid X - 1 \mid)$, $P(XY < \frac{1}{2})$. Dan hitunglah fkp marjinal dari peubah acak $X$ dan fkp marjinal dari peubah acak $Y$. Berapa nilai $E(XY)$ dan $cov(X,Y)$?

## 1.10 Sebaran Bersyarat dan Peubah Acak Bebas

**Definisi**

Ambil peubah acak ganda-2 $(X,Y)$ yang diskret atau kontinu dengan fmp/fkp bersama $f(x,y)$ untuk $(x,y) \in R^2$, serta $f(x)$ untuk $x \in R$ dan $f(y)$ untuk $y \in R$ masing-masing sebagai fmp/fkp marjinal dari peubah acak $X$ dan $Y$.

- Fmp/fkp bersyarat dari peubah acak $Y$ bila diketahui $X = x$ adalah suatu fungsi dari $y$ sebagai berikut

$$f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} \text{ untuk } y \in R, \text{ asal } f(x) > 0$$

- Fmp/fkp bersyarat dari peubah acak $X$ bila diketahui $Y = y$ adalah suatu fungsi dari $x$ sebagai berikut

$$f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \text{ untuk } x \in R, \text{ asal } f(y) > 0$$

**Definisi**

Ambil peubah acak ganda-2 $(X,Y)$ yang diskret atau kontinu dengan fmp/fkp bersama $f(x,y)$ untuk $(x,y) \in R^2$, serta $f(x)$ untuk $x \in R$ dan $f(y)$ untuk $y \in R$ masing-masing sebagai fmp/fkp marjinal dari peubah acak $X$ dan $Y$. Peubah acak $X$ dan $Y$ disebut **bebas** jika

$$f(x,y) = f(x).f(y) \text{ untuk } \underline{\text{semua}}\ (x,y) \in R^2$$

**Teorema**

Jika peubah acak $X$ dan $Y$ bebas, maka

- Fmp/fkp bersyarat dari peubah acak $Y$ bila diketahui $X = x$ adalah

$$f(y \mid x) = f(y) \text{ untuk } y \in R, \text{ asal } f(x) > 0$$

- Fmp/fkp bersyarat dari peubah acak $X$ bila diketahui $Y = y$ adalah suatu fungsi dari $x$ sebagai berikut

$$f(x \mid y) = f(x) \text{ untuk } x \in R, \text{ asal } f(y) > 0$$