Bab 2

Aksioma Peluang

2.1 Ruang Contoh

Dalam suatu percobaan, kita tidak tahu dengan pasti apa hasil yang akan terjadi. Misalnya pada percobaan membeli lampu pijar, kita tidak tahu dengan pasti, apakah lampu tersebut baik (nyala) atau rusak (mati). Walaupun demikian, kita hanya bisa tahu semua kemungkinan yang akan terjadi. Himpunan dari semua kemungkinan yang akan terjadi pada suatu percobaan disebut **ruang contoh** atau *sample space*, dan sering dilambangkan sebagai S.

Definisi 2.1
Ruang contoh S adalah himpunan dari semua peristiwa yang mungkin muncul sebagai hasil dari suatu tindakan atau percobaan.

Perhatikan beberapa contoh berikut:

1. Jenis kelamin dari seorang bayi yang akan lahir dari seorang ibu, menghasilkan ruang contoh
$$S = \{L, P\}$$
2. Tujuh kuda dalam arena balap, susunan atau urutan kuda memasuki garis finish menghasilkan ruang contoh
$$S = \{\text{semua permutasi sebanyak } 7! \text{ dari } (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)\}$$
3. Percobaan melempar dua koin mata uang, maka ruang contoh percobaan tersebut adalah
$$S = \{(M, M), (M, B), (B, M), (B, B)\}$$
4. Percobaan melempar dua dadu berisi enam sisi, maka ruang contoh percobaan tersebut memiliki 36 unsur, yaitu
$$S = \{(i, j); i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

dimana i adalah sisi yang muncul pada pelemparan pertama, dan j adalah sisi yang muncul pada pelemparan kedua.

5. Percobaan mengukur daya tahan (dalam jam) sebuah transistor, maka ruang contoh adalah semua nilai bilangan nyata non-negatif, yaitu

$$S = \{x; 0 \leq x \leq \infty, x \in R\}$$

2.2 Kejadian

Subset atau himpunan bagian dari suatu ruang contoh disebut **kejadian**, biasanya dinotasikan dengan E.

Definisi 2.2
Suatu subset dari ruang contoh S, termasuk S dan $\emptyset$, disebut kejadian (*event*).

Berikut beberapa contoh kejadian terkait dengan ruang contoh sebelumnya:

1. Diketahui $S = \{L, P\}$. Jika $E = \{L\}$, maka E adalah kejadian ibu melahirkan bayi laki-laki. Demikian pula $E = \{P\}$.
2. Jika

$$E = \{\text{semua urutan pemenang } S \text{ dimana 3 adalah yang pertama}\}$$

maka E adalah kejadian urutan pemenang dimana kuda nomor 3 sebagai yang pertama memasuki finish

3. Jika $E = \{(M, M), (M, B)\}$, maka E adalah kejadian dimana sisi M muncul pada pelemparan pertama
4. Jika $E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$, maka E adalah kejadian bahwa jumlah sisi dadu yang dilempar dua kali adalah 7
5. Jika $E = \{x; 0 \leq x \leq 5\}$, maka E adalah kejadian daya tahan transistor tidak lebih dari 5 jam.

Untuk dua kejadian E dan F dari ruang contoh S, kita dapat mendefinisikan kejadian baru dengan menggunakan operasi himpunan, misalnya:

- **Operasi gabung**.
  Pada contoh 1, jika $E = \{L\}$ dan $F = \{P\}$ maka

$$E \cup F = \{L, P\}$$

Contoh lain, pada contoh 3, jika $E = \{(M, M), (M, B)\}$ dan $F = \{(B, M)\}$, maka

$$E \cup F = \{(M, M), (M, B), (B, M)\}$$

- **Operasi irisan**.
  Pada contoh 3, jika $E = \{(M, M), (M, B), (B, M)\}$ dan $F = \{(M, B), (B, M), (B, B)\}$ maka E irisan F, atau dinotasikan sebagai EF (kadang ditulis $E \cap F$), adalah

$$EF = E \cap F = \{(M, B), (B, M)\}$$

- **Operasi komplemen**.
  Pada contoh 3, jika $E = \{(M, M), (M, B)\}$, maka

$$E^c = \{(B, M), (B, B)\}$$

Operasi suatu kejadian juga mengikuti kaidah dalam himpunan, yaitu:

- **Commutative**.

$$\begin{aligned} E \cup F &= F \cup U \\ EF &= FE \end{aligned}$$

- **Associative**.

$$\begin{aligned} (E \cup F) \cup G &= E \cup (F \cup G) \\ (EF)G &= E(FG) \end{aligned}$$

- **Distributive**

$$\begin{aligned} (E \cup F)G &= EG \cup FG \\ EF \cup G &= (E \cup G)(F \cup G) \end{aligned}$$

- **deMorgan**

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right)^c &= \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c \\ \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i \right)^c &= \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c \end{aligned}$$

Definisi 2.3
Dua kejadian A dan B disebut **terpisah** atau *disjoint* jika

$$A \cap B = \emptyset$$

Akibatnya, kejadian mustahil ($\emptyset$) selalu terpisah dengan kejadian lain dan kejadian mustahil itu sendiri *mutually disjoint*. Sedangkan S tidak selalu terpisah dengan kejadian lain

$$\begin{aligned} \emptyset \cap A &= \emptyset \\ \emptyset \cap \emptyset &= \emptyset \\ S \cap A &\neq \emptyset \end{aligned}$$

Definisi 2.4
Himpunan dari kejadian disebut **koleksi**.

2.3 Aksioma Peluang

Definisi 2.5 (Aksioma Peluang)
Ambil ruang contoh S dan koleksi kejadian E dalam S. Maka dibuat aksioma (aturan main) tentang fungsi peluang P bahwa

1. Peluang suatu kejadian, $P(E)$, bernilai $0 \leq P(E) \leq 1$
2. Peluang ruang contoh, $P(S) = 1$
3. Untuk semua kejadian yang *mutually exclusive* E_1, E_2, ... dimana $E_i \cap E_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$, maka

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

Contoh 2.1
Dalam percobaan melempar sekeping mata uang, diasumsikan bahwa kemunculan sisi muka (M) sama dengan kemunculan sisi belakang (B). Oleh karena itu,

$$P(\{M\}) = P(\{B\}) = \frac{1}{2}$$

Dengan kata lain, jika mata uang tidak seimbang dimana kemunculan sisi muka dua kali dari kemunculan sisi belakang, maka

$$P(\{M\}) = \frac{2}{3} \text{ dan } P(\{B\}) = \frac{1}{3}$$

Contoh 2.2
Jika sebuah dadu seimbang dilempar satu kali, maka kita memiliki

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Dari aksioma nomor 3, maka peluang munculnya sisi genap adalah

$$P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Beberapa proposisi sederhana akibat dari adanya aksioma peluang antara lain adalah jika P adalah fungsi peluang, dan kejadian $A, B \subseteq S$ maka:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(A) \leq 1$
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$
4. Jika $A \subseteq B$, maka $P(A) \leq P(B)$
5. $P(B \cap A^c) = p(B) - P(A \cap B)$
6. $P(A \cup B) = p(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2.4 Ruang Contoh dengan Kemunculan yang Sama

Ambil suatu ruang contoh S memiliki banyaknya anggota sebanyak N, yaitu:

$$S = \{1, 2, ..., N\}$$

dan

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ ... \ = P(\{N\})$$

Dari aksioma peluang nomor 2 dan 3, maka

$$P(\{i\}) = \frac{1}{N} \text{ untuk } i = 1, 2, ..., N$$

Oleh karena itu, jika diasumsikan bahwa semua kemunculan dari suatu percobaan adalah sama (*equally likely outcomes*), maka peluang suatu kejadian E dapat dihitung dengan

$$P(E) = \frac{\text{banyaknya unsur } E}{\text{banyaknya unsur } S} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Contoh 2.3
Jika dua dadu dilempar, berapa peluang bahwa jumlah sisi yang muncul adalah 7?

Contoh 2.4
Jika 3 bola diambil "secara acak" dari keranjang yang berisi 6 bola putih dan 5 bola hitam, berapa peluang diperoleh 1 bola putih dan 2 hitam?

Contoh 2.5
Suatu tim beranggotakan 5 orang dipilih dari kelompok 6 laki-laki dan 9 perempuan. Jika pemilihan dilakukan secara acak, berapa peluang bahwa anggota panitia terdiri atas 3 laki-laki dan 2 perempuan?

Contoh 2.6
Suatu keranjang berisi n bola, satu diantaranya adalah berbeda. Jika k bola diambil, berapa peluang bola yang berbeda tersebut terambil?

Contoh 2.7
Dalam permainan *bridge*, 52 kartu dibagi ke 4 pemain. Berapa peluang bahwa

a) Seorang pemain mendapatkan 13 *spades.*

b) Setiap pemain mendapatkan 1 *ace.*

Contoh 2.8
Jika terdapat n orang di suatu ruangan, berapa peluang bahwa tidak ada dua orang yang merayakan ulang tahun pada tanggal yang sama (asumsikan ada 365 hari dalam satu tahun)? Berapa nilai n agar peluang tersebut bernilai kurang dari $\frac{1}{2}$?

Contoh 2.9
Suatu tim sepak bola terdiri atas 20 pemain penyerang dan 20 pemain bertahan menempati asrama, dimana satu kamar berisi 2 pemain. Jika dipilih secara acak, berapa peluang bahwa tidak ada pasangan pemain penyerang dan pemain bertahan berada di satu kamar?

Latihan 2

1. Suatu kotak berisi 3 marmer, yaitu 1 merah, 1 hijau, dan 1 biru. Anggaplah ada percobaan mengambil 1 marmer dari kotak kemudian dicatat dan dikembalikan ke dalam kotak. Selanjutnya dilakukan pengambilan marmer untuk kedua kali. Tuliskan ruang contoh percobaan tersebut. Bagaimana ruang contoh jika pada dua kali pengambilan dilakukan tanpa pemulihan.

2. Misalkan A dan B adalah dua kejadian *mutually exclusive* dimana $P(A) = 0.3$ dan $P(B) = 0.5$. Berapa peluang
   (a) kejadian A atau B muncul
   (b) kejadian A muncul, tetapi B tidak
   (c) kejadian A dan B keduanya muncul

3. Suatu toko komputer menerima pembayaran menggunakan kartu kredit VISA atau Master. Diantara konsumen, 24 persen menggunakan kartu kredit Master, 61 persen VISA, dan 11 persen menggunakan kedua kartu kredit tersebut. Berapa persen konsumen yang membawa kartu kredit dapat dilayani oleh toko tersebut?

4. Total ada 28 persen remaja merokok filter, 7 persen merokok kretek, dan 5 persen merokok keduanya.
   (a) Berapa persen remaja yang tidak merokok keduanya?
   (b) Berapa persen remaja yang merokok kretek, tetapi tidak merokok filter

5. Sepasang dadu dilempar. Berapa peluang bahwa sisi dadu kedua yang muncul lebih besar dari sisi dadu pertama?

6. Jika dua dadu dilempar, berapa peluang bahwa jumlah sisi yang muncul sama dengan i? Dapatkan untuk i=2,3,...,11,12.

7. Buktikan bahwa $P(EF^c) = P(E) - P(EF)$.

8. Buktikan bahwa $P(A^cB^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$.