Bab 3

Analysis of Variance

3.1 Percobaan Faktor Tunggal

Misalnya terdapat suatu percobaan untuk menguji kecepatan proses empat jenis komputer yang masing-masing memiliki spesifikasi yang sama, kecuali ukuran RAM yang berbeda, yaitu masing-masing 1GB, 2GB, 3GB, dan 4GB. Setiap komputer diberikan suatu program perhitungan tertentu dan diproses kemudian dicatat waktunya. Setiap komputer dicobakan program yang sama dan dilakukan sebanyak lima kali (ulangan).

Percobaan ini merupakan contoh dari suatu percobaan faktor tunggal dengan 4 level (1GB, 2GB, 3GB, dan 4GB) dan n=5 ulangan. Oleh karena itu, dibutuhkan 20 unit percobaan yang harus dicobakan secara acak, artinya urutan dari 20 tindakan dilakukan secara acak. Cara sederhana untuk menentukan urutan tersebut adalah menggunakan bilangan acak yang dapat dibangkitkan dengan program Excel, yaitu fungsi **RAND()**. Buatlah kolom untuk menyimpan level berurutan 1GB, 1GB, 1GB, 1GB, 1GB, ..., 4GB, 4GB, 4GB, 4GB, 4GB. Bangkitkan bilangan acak di kolom sebelah kanannya, dan selanjutnya urutkan berdasarkan bilangan acak. Hasilnya adalah urutan percobaan yang harus dilakukan. Data yang diperoleh disusun dalam bentuk tabel berikut (Contoh 3):

RAM	1	2	3	4	5	Total	Rataan
1GB	725	700	715	685	710	3535	707.0
2GB	600	651	610	637	629	3127	625.4
3GB	565	593	590	579	610	2937	587.4
4GB	575	542	530	539	570	2756	551.2

Secara umum, percobaan acak dengan faktor tunggal yang terdiri dari a level atau perlakuan dapat membangkitkan data dengan lay-out sebagai berikut:

Perlakuan	Observasi				Total	Rataan
1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1n}	$y_{1.}$	$\bar{y}_{1.}$
2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2n}	$y_{2.}$	$\bar{y}_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a	y_{a1}	y_{a2}	$\cdots$	y_{an}	$\underline{y_{a.}}$	$\underline{\bar{y}_{a.}}$
					$y_{..}$	$\bar{y}_{..}$

Model linier untuk percobaan dengan faktor tunggal dan a level dapat dituliskan sebagai

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij},\ i = 1, 2, ..., a \text{ dan } j = 1, 2, ..., n_i$$

dimana y_{ij} adalah respon atau pengamatan akibat perlakuan ke-i dan ulangan ke-j, μ adalah rata-rata umum, τ_i adalah pengaruh perlakuan ke-i, dan ϵ_{ij} adalah galat atau error dari perlakuan ke-i dan ulangan ke-j. Model ini juga sering disebut sebagai **one-way analysis of variance** atau **sidik ragam satu arah**. Asumsi yang dibutuhkan untuk analisis terhadap model linier tersebut adalah

$$y_{ij} \sim N(\mu + \tau_i, \sigma^2) \text{ atau } \epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

Hipotesis yang akan diuji adalah

$$\begin{aligned} H_0 &: \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0 \\ H_1 &: \tau_i \neq 0 \text{ untuk sedikitnya satu } i \end{aligned}$$

Daftar sidik ragam atau **ANOVA=Analysis of Variance** dari model linier percobaan faktor tunggal dengan a level dapat disusun dengan format sebagai berikut:

Sumber Keragaman	db	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	F_0	P-Value
Perlakuan	$a-1$	$\sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i.}^2}{n_i} - \frac{y_{..}^2}{N}$	$JK(P)/(a-1)$	$KT(P)/KT(E)$	
Error (Galat)	$N-a$	$JK(T) - JK(P)$	$JK(E)/(N-a)$		
Total	$N-1$	$\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$			

Dari data percobaan Contoh 3 diperoleh hasil sebagai berikut:

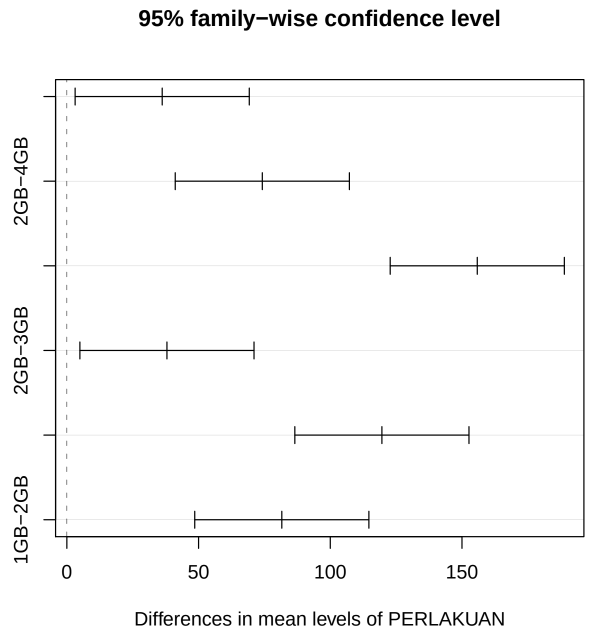
```
> d <- read.table(file="data03.dat", header=TRUE)
> fit <- lm(RESPON~PERLAKUAN, d)
> anova(fit)
Analysis of Variance Table

Response: RESPON
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
PERLAKUAN  3  66871 22290.2  66.797 2.883e-09 ***
Residuals 16   5339   333.7
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Hasil analisis menunjukkan bahwa sedikitnya ada satu perlakuan yang memberikan pengaruh terhadap kecepatan proses. Untuk itu dilakukan analisis lanjutan, yaitu pembandingan pasangan nilai tengah perlakuan untuk mengetahui perlakuan mana yang berpengaruh dan mana yang tidak berpengaruh secara statistika. Banyak metode yang tersedia untuk melakukan uji pasangan nilai tengah perlakuan, antara lain adalah **uji t** yang telah dibahas pada Bab 2 sebelumnya.

```
> pairwise.t.test(d$RESPON, d$PERLAKUAN)

        Pairwise comparisons using t tests with pooled SD

data:  d$RESPON and d$PERLAKUAN

    1GB     2GB     3GB
2GB 1.1e-05 -       -
3GB 8.5e-08 0.0092  -
4GB 2.2e-09 2.5e-05 0.0092

P value adjustment method: holm
```

Pembandingan pasangan nilai tengah perlakuan dapat juga menggunakan uji Tukey HSD (Tukey's Honest Significant Difference) sebagai berikut:

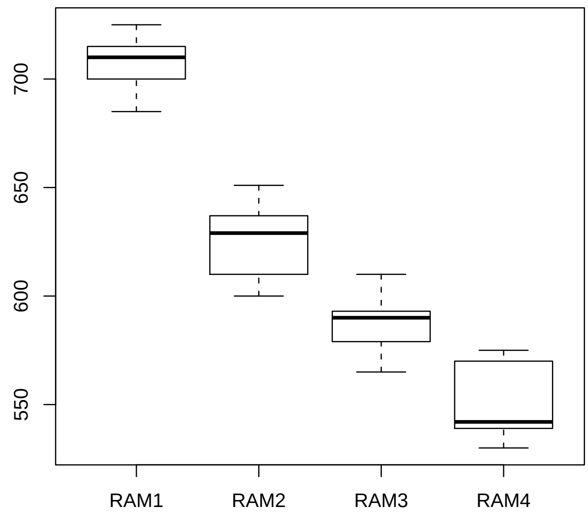
```
> t<-aov(RESPON~PERLAKUAN,data=d)
> tuk <- TukeyHSD(t, ordered=T)
> tuk
  Tukey multiple comparisons of means
    95% family-wise confidence level
    factor levels have been ordered

Fit: aov(formula = RESPON ~ PERLAKUAN, data = d)

$PERLAKUAN
         diff        lwr       upr     p adj
3GB-4GB  36.2   3.145624  69.25438 0.0294279
2GB-4GB  74.2  41.145624 107.25438 0.0000455
1GB-4GB 155.8 122.745624 188.85438 0.0000000
2GB-3GB  38.0   4.945624  71.05438 0.0215995
1GB-3GB 119.6  86.545624 152.65438 0.0000001
1GB-2GB  81.6  48.545624 114.65438 0.0000146

> plot(tuk)
```



Gambar 3.1: Selang Kepercayaan 95% Beda Nilai Tengah

Deskripsi data percobaan dapat digambarkan dalam bentuk boxplot sebagai berikut:

```
> boxplot(RESPON~PERLAKUAN, d)
```



Gambar 3.2: Boxplot kecepatan setiap perlakuan

3.2 Percobaan Dua Faktor

Suatu percobaan dilakukan untuk membandingkan kinerja empat seri processor yaitu P8500, P8700, P8900, dan P9100. Kinerja diukur dari persentase penggunaan CPU untuk melakukan proses tertentu. Semakin besar persentase penggunaan CPU, maka processor tersebut dianggap semakin tidak efisien. Masing-masing processor dipasang pada 6 PC, yaitu B1, B2, B3, B4, B5, dan B6 sehingga dibutuhkan 24 PC untuk melakukan percobaan ini, yaitu masing-masing 4 PC B1, 4 PC B2, dan seterusnya. Setiap jenis PC B1-B6 yang digunakan ternyata memiliki spesifikasi yang berbeda dan diduga mempengaruhi persentase penggunaan CPU. Data yang diperoleh dari percobaan ini adalah sebagai berikut (Contoh 4):

Processor	B1	B2	B3	B4	B5	B6
P8500	90.3	89.2	98.2	93.9	87.4	97.9
P8700	92.5	89.5	90.6	94.7	87.0	95.8
P8900	85.5	90.8	89.6	86.2	88.0	93.4
P9100	82.5	89.5	85.6	87.4	78.9	90.7

Model linier untuk percobaan Contoh 4 adalah

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij},\ i = 1, 2, ..., a \text{ dan } j = 1, 2, ..., b$$

dimana β_j adalah pengaruh kelompok unit ke-j (dikenal sebagai **blok** atau **kelompok**). Sedangkan hipotesis yang ingin diuji adalah sama seperti model faktor tunggal, yaitu

$$H_0 \ :\ \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0$$
$$H_1 \ :\ \tau_i \neq 0 \text{ untuk sedikitnya satu } i$$

Daftar sidik ragam dari model linier percobaan dua faktor dapat disusun dengan format sebagai berikut:

Sumber Keragaman	db	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	F_0	P-Value
Perlakuan	$a-1$	$\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{a} y_{i.}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$	$JK(P)/(a-1)$	$KT(P)/KT(E)$	
Kelompok	$b-1$	$\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{b} y_{.j}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$	$JK(K)/(b-1)$		
Error (Galat)	$(a-1)(b-1)$	$JK(T) - JK(P) - JK(K)$	$\frac{JK(E)}{(a-1)(b-1)}$		
Total	$N-1$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$			

Dari data percobaan Contoh 4 diperoleh hasil sebagai berikut:

```
> d<-read.table(file="data04.dat", header=T)
> d
  PERLAKUAN BLOK RESPON
1     P8500   B1   90.3
2     P8500   B2   89.2
3     P8500   B3   98.2
          ...

> fit <- aov(RESPON~PERLAKUAN+BLOK, data=d)
> summary(fit)
            Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
PERLAKUAN    3 178.17  59.390  8.1071 0.001916 **
BLOK         5 192.25  38.450  5.2487 0.005532 **
Residuals   15 109.89   7.326
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

(Contoh 5). Terdapat suatu percobaan untuk melihat pengaruh kecepatan workstation, kecepatan server, dan banyaknya workstation dalam suatu LAN.

Kecepatan yang dicobakan ada dua level, yaitu rendah (33MHz) dan tinggi (66MHz), sedangkan banyaknya workstation yang dicobakan juga dua level, yaitu rendah (2PC) dan tinggi (8PC). Dengan demikian, level setiap perlakuan yang akan diberikan seperti tabel berikut:

Respon	Satuan	Rendah	Tinggi
Kecepatan workstation	MHz	33	66
Kecepatan server	MHz	33	66
Jumlah workstation	PC	2	8

Dengan demikian, terdapat 8 kemungkinan test yang harus dicobakan dalam percobaan ini, yaitu seperti yang tercantum pada tabel berikut:

Nomor Test	Kecepatan Workstation	Kecepatan Server	Banyaknya Workstation
1	33	33	2
2	66	33	2
3	33	66	2
4	66	66	2
5	33	33	8
6	66	33	8
7	33	66	8
8	66	66	8

Setiap test diberikan dengan 10 kali ulangan dan diperoleh data kecepatan akses dalam satuan microsecond sebagai berikut:

Test	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	48	48	47	47	47	47	48	47	47	47
2	42	43	41	42	42	42	43	42	42	42
3	46	47	46	46	47	47	46	46	46	47
4	40	41	39	40	39	40	41	40	40	39
5	46	46	46	47	46	46	47	47	46	46
6	42	41	40	42	41	42	41	40	41	41
7	46	46	44	45	46	45	46	45	45	45
8	39	39	40	39	39	40	39	38	39	39

Contoh 5 merupakan ilustrasi dari suatu percobaan dengan perlakuan yang terdiri dari tiga faktor, yaitu kecepatan workstation (A), kecepatan server (B), dan banyaknya workstation (C) masing-masing dengan dua level yaitu rendah (-) dan tinggi (+). Pengaruh perlakuan diduga saling berinteraksi, artinya secara bersama mempengaruhi respon yang diamati. Percobaan seperti ini disebut sebagai percobaan dengan rancangan perlakuan faktorial 2^k.

Sebagai contoh, misalkan faktor yang akan dianalisis adalah A dan B (misalnya ambil data dengan nilai perlakuan $C = 2$) sehingga yang terjadi adalah percobaan dengan rancangan perlakuan faktorial 2^2 dengan lay-out data sebagai berikut:

Test	A	B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	-	48	48	47	47	47	47	48	47	47	47
2	+	-	42	43	41	42	42	42	43	42	42	42
3	-	+	46	47	46	46	47	47	46	46	46	47
4	-	-	40	41	39	40	39	40	41	40	40	39

Misalkan (1), a, b, ab adalah total nilai dari r ulangan untuk setiap faktor dengan level rendah untuk keduanya, A tinggi B rendah, A rendah B tinggi, dan keduanya tinggi. Model linier untuk percobaan dengan rancangan perlakuan faktorial 2^k adalah

$$Y = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + \epsilon$$

Untuk memudahkan perhitungan, disusun tanda aljabar masing-masing faktor dan level sebagai berikut:

Kombinasi	I	A	B	AB
(1)	+	-	-	+
a	+	+	-	-
b	+	-	+	-
ab	+	+	+	+

Sehingga daftar sidik ragam untuk menguji hipotesis masing-masing pengaruh perlakuan adalah:

Sumber Keragaman	db	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	F_0	P-Value
A	1	$\frac{[ab+a-b-(1)]^2}{4r}$	$JK(A)/1$	$KT(A)/KT(E)$	
A	1	$\frac{[ab+b-a-(1)]^2}{4r}$	$JK(B)/1$	$KT(B)/KT(E)$	
AB	1	$\frac{[ab+(1)-a-b]^2}{4r}$	$JK(AB)/1$	$KT(AB)/KT(E)$	
Error (Galat)	$N-4$	$JK(T) - JK(A) - JK(B) - JK(AB)$	$\frac{JK(E)}{(N-4)}$		
Total	$N-1$	$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{r} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{4r}$			

Dari data percobaan Contoh 5 untuk $C = 2$ diperoleh hasil sebagai berikut:

```
> d <- read.table(file="data05a.dat", header=T)
> d
   TEST  A  B C  R RESPON
1     1 33 33 2  1     48
2     1 33 33 2  2     48
3     1 33 33 2  3     47
            ...

> fit <- aov(RESPON~A+B+A*B, d)
> summary(fit)
            Df Sum Sq Mean Sq  F value    Pr(>F)
A            1 342.23  342.23 1001.634  <2.2e-16 ***
B            1  24.03   24.03   70.317 5.489e-10 ***
A:B          1   4.22    4.22   12.366  0.001202 **
Residuals   36  12.30    0.34
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Apa kesimpulannya? Bandingkan dengan hasil analisis model penuh yang melibatkan ketiga faktor berikut:

```
            Df Sum Sq Mean Sq   F value    Pr(>F)
A            1 667.01  667.01 1826.0418  <2.2e-16 ***
B            1  46.51   46.51  127.3346  <2.2e-16 ***
C            1  19.01   19.01   52.0494 4.437e-10 ***
A:B          1   6.61    6.61   18.1027 6.206e-05 ***
A:C          1   0.11    0.11    0.3080    0.5806
B:C          1   0.01    0.01    0.0342    0.8538
A:B:C        1   0.11    0.11    0.3080    0.5806
Residuals   72  26.30    0.37
```