Bab 3

Peluang Bersyarat dan Kejadian Bebas

3.1 Peluang Bersyarat

Misalkan ruang contoh berpeluang sama dari percobaan melempar sebuah dadu bersisi 6, maka $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dan terdapat dua kejadian, yaitu B adalah kejadian muncul sisi kurang dari 6, maka $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; dan A adalah kejadian munculnya sisi genap, maka $A = \{2, 4, 6\}$. Berdasarkan hal ini, maka $P(B) = \frac{5}{6}$, dan $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Jika dua kejadian A dan B dilakukan berurutan, yaitu B terjadi terlebih dahulu, kemudian menyusul A, maka $A = \{2, 4\}$. Peluang kejadian A setelah kejadian B (A *given* B), atau dituliskan sebagai $p(A \mid B) = \frac{2}{5}$.

Definisi 3.1
Kejadian A dan B dalam ruang contoh S dengan $P(B)>0$. Peluang terjadinya A bila kejadian B sudah diketahui terjadi adalah

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

disebut **peluang A dengan syarat B**.

Dari contoh sebelumnya, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{6}$
  $B = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{6}$
  $A \cap B = \{2, 4\}$ maka $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$
  $P(A \mid B) < P(A)$, berarti kejadian B memperkecil A, atau $B \downarrow A$
- $C = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
  $C \cap B = \{2, 4\}$ maka $P(C \mid B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$
  $P(C \mid B) = P(C)$, berarti $B \updownarrow A$

- $D = \{2,3,4\} \Rightarrow P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
  $D \cap B = \{2,4\}$ maka $P(D \mid B) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$
  $P(D \mid B) > P(D)$, berarti kejadian B memperbesar D, $B \uparrow D$

Contoh 3.1
Sebuah koin seimbang dilempar dua kali. Berapa peluang muncul dua sisi muka, dengan syarat sisi muka muncul yang pertama.

Contoh 3.2
Suatu kotak berisi 10 marmer putih, 5 kuning, dan 10 hitam. Sebuah marmer dipilih secara acak dari kotak dan dicatat, ternyata tidak diperoleh marmer hitam kemudian dikembalikan. Berapa peluang jika selanjutnya diulangi pengambilan satu marmer dan diperoleh marmer kuning.

Contoh 3.3
Dalam permainan *bridge*, 52 kartu dibagi sama ke empat pemain, sebut saja Timur, Barat, Utara, dan Selatan. Jika Utara dan Selatan memiliki total 8 *spades*, berapa peluang Timur mendapatkan 3 dari 5 *spades* sisanya?

Contoh 3.4
Kantor tempat bu Budi bekerja melaksanakan pesta makan malam bagi pegawai yang sedikitnya memiliki satu anak laki-laki. Jika diketahui bu Budi memiliki dua anak, berapa peluang kedua anaknya adalah laki-laki, dan bu Budi termasuk pegawai yang diundang ke dalam acara makan malam tersebut?

Contoh 3.5
Celine belum memutuskan apakah akan mengambil kuliah Bahasa Perancis atau Kimia. Dia menduga bahwa peluangnya mendapatkan nilai A akan menjadi $\frac{1}{2}$ untuk Bahasa Perancis, dan $\frac{2}{3}$ untuk Kimia. Jika dalam memutuskan hal ini Celine melempar koin seimbang, berapa peluang dia mengambil kuliah Kimia dan memperoleh nilai A?

Contoh 3.6
Anggaplah dalam sebuah kotak terdapat 8 bola merah dan 4 bola putih, kemudian diambil 2 bola dari kotak tanpa pemulihan. Jika diasumsikan bahwa setiap bola memiliki kemungkinan yang sama untuk terpilih, berapa peluang bahwa kedua bola yang terpilih berwarna merah?

3.2 Kaidah Bayes

Hukum Penggandaan

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B) \\ P(B \mid A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(A)P(B \mid A) \\ & \text{karena } P(A \cap B) = P(B \cap A) \text{, maka} \\ P(A \cap B) &= P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B) \end{aligned}$$

Contoh 3.7
Anggap terdapat 5 harddisk baik dan 2 harddisk rusak pada satu kemasan. Untuk mendapatkan harddisk yang rusak, dilakukan pengujian dengan cara mengambil dan menguji satu per satu secara acak tanpa pemulihan. Berapa peluang diperoleh 2 harddisk rusak pada dua pengujian yang pertama?
Jawab:
Misal D_1 dan D_2 adalah kejadian diperoleh harddisk rusak pada pengujian pertama dan kedua. Maka

$P(D_1) = \frac{2}{7}$ dan $P(D_2 \mid D_1) = \frac{1}{6}$
sehingga $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2 \mid D_1) = \frac{2}{7}\text{x}\frac{1}{6} = \frac{1}{21}$

Hukum Total Peluang
Dua kejadian E dan F dimana $P(F) > 0$ dan $P(F^c) > 0$, maka berlaku

$$P(E) = P(E \mid F)P(F) + P(E \mid F^c)P(F^c)$$

Bukti:
Ambil dua kejadian E dan F. Kita dapat menuliskan kejadian E sebagai

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$$

Karena $(E \cap F)$ dan $(E \cap F^c)$ merupakan dua kejadian terpisah, maka

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap F) + P(E \cap F^c) \\ &= P(E \mid F)P(F) + P(E \mid F^c)P(F^c) \\ &= P(E \mid F)P(F) + P(E \mid F^c)[1 - P(F)] \end{aligned}$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa peluang kejadian E adalah rata-rata terboboti dari peluang E dengan syarat F, dan peluang E dengan syarat bukan F. Berikut adalah beberapa ilustrasi:

Contoh 3.8
Suatu perusahaan asuransi percaya bahwa orang dapat dibagi ke dalam dua kelompok, yaitu rawan kecelakaan dan tidak. Statistik menunjukkan bahwa orang yang rawan kecelakaan akan celaka dalam satu tahun ini dengan peluang 0.4, dan turun menjadi 0.2 untuk orang yang bukan rawan kecelakaan. Jika diasumsikan 30 persen populasi adalah rawan kecelakaan, berapa peluang bahwa seseorang polis asuransi akan mengalami kecelakaan dalam satu tahun tertentu?

Contoh 3.9
Lanjutan dari Contoh 3.8, anggaplah seseorang polis asuransi mengalami kecelakaan pada tahun tertentu. Berapa peluang bahwa dia adalah orang yang masuk ke dalam kelompok rawan kecelakaan?

Contoh 3.10
Terdapat tiga wadah I, II, dan III. Wadah I berisi 2 bola hitam dan 1 bola kuning, wadah II berisi 1 bola hitam dan 1 bola kuning, sedangkan wadah III berisi 1 bola hitam dan 3 bola kuning. Percobaan memilih secara acak satu wadah lalu mengambil secara acak satu bola dari wadah tersebut. Jika bola yang terambil adalah bola kuning, berapa peluang bahwa wadah yang terpilih adalah wadah I?

Kaidah Bayes
Ambil F_1, F_2, ..., F_n adalah kejadian *mutually exclusive* dan

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S$$

dan kejadian E dapat dituliskan sebagai

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap F_i) = S$$

maka

$$\begin{aligned} P(F_j \mid E) &= \frac{P(E \cap F_j)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E \mid F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E \mid F_i)P(F_i)} \end{aligned}$$

Contoh 3.11
Test darah di laboratorium diketahui 95% efektif mendeteksi penyakit tertentu. Walaupun demikian, test juga menghasilkan 1% hasil penyakit padahal seseorang yang ditest adalah sehat (disebut positif salah). Jika 0.5% populasi memiliki penyakit, berapa peluang orang yang ditest memiliki penyakit jika diketahui bahwa hasil test darahnya positif?

Contoh 3.12
Juri di pengadilan memiliki keyakinan 65% terdakwa melakukan kejahatan. Selama proses pengadilan, 85% terdakwa yang terbukti bersalah melakukan kejahatan adalah bertangan kidal. Jika 23% populasi yang tidak melakukan kejahatan adalah bertangan kidal, berapa peluang juri memutuskan terdakwa yang bertangan kidal adalah terdakwa.

Contoh 3.13
Dari suatu pengamatan diketahui 60% terdakwa di pengadilan diputuskan bersalah. Telah diketahui bahwa pelaku kejahatan memiliki ciri-ciri fisik yang khusus. Jika 20% populasi penduduk memiliki ciri-ciri fisik yang khusus, berapa persen populasi demikian yang menjadi terdakwa diputuskan bersalah oleh pengadilan?

Definisi 3.2 (Rasio *Odd*)
Rasio *Odd* dari kejadian A didefinisikan sebagai

$$\frac{P(A)}{P(A^c)} = \frac{P(A)}{1-P(A)} \text{ juga } \frac{P(H \mid E)}{P(H^c \mid E)} = \frac{P(H)}{P(H^c)}\frac{P(E \mid H)}{P(E \mid H^c)}$$

Contoh 3.14
Ketika koin A dilempar, peluang sisi muka yang muncul adalah $\frac{1}{4}$. Sedangkan ketika koin B dilempar, peluang muncul sisi muka adalah $\frac{3}{4}$. Satu dari kedua koin tersebut diambil dan dilempar dua kali. Jika diperoleh dua sisi muka, berapa peluang bahwa koin yang dilempar adalah B? Dan berapa rasio *odd* dari kejadian tersebut?

Contoh 3.15
Misalkan ada 3 wadah, A berisi 2 bola putih dan 4 bola merah, B berisi 8 bola putih dan 4 bola merah, C berisi 1 bola putih dan 3 bola merah. Jika 1 bola dipilih dari setiap wadah, berapa peluang bola yang terambil dari wadah A adalah bola putih dengan syarat 2 bola lainnya yang terambil adalah bola putih.

Contoh 3.16
Sebuah pesawat hilang, dan diperkirakan jatuh di tiga daerah dengan kemungkinnan yang sama. Misalkan $1 - \beta_i$ melambangkan peluang bahwa pesawat akan ditemukan setelah pencarian di daerah ke-i, untuk i=1,2,3. Berapa peluang pesawat ditemukan di daerah ke-i setelah pencarian di daerah ke-1 mengalami kegagalan, untuk i=1,2,3.

Contoh 3.17
Sebuah keluarga yang baru pindah ke suatu kota diketahui mempunyai dua orang anak. Pada suatu saat sang ibu terlihat berjalan dengan salah satu dari anaknya. Jika anak tersebut adalah perempuan, berapa peluang bahwa kedua anak keluarga tersebut adalah perempuan?

3.3 Kejadian Bebas

Definisi 3.3
Dua kejadian E dan F disebut saling bebas jika

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

Contoh 3.18
Sebuah kartu dipilih secara acak dari 52 tumpukan kartu. Jika E adalah kejadian terpilih kartu *ace*, dan F adalah kejadian terpilih kartu *spade*, tunjukkan bahwa E dan F adalah kejadian saling bebas.

Contoh 3.19
Dua koin dilempar dan semua kemunculannya memiliki peluang yang sama. Jika E adalah kejadian muncul sisi muka pada koin pertama, dan F adalah kejadian muncul sisi belakang pada koin kedua, tunjukkan bahwa E dan F adalah kejadian yang saling bebas.

Contoh 3.20
Dua dadu seimbang dilempar. Jika E_1 adalah kejadian munculnya jumlah sisi kedua dadu bernilai 6, dan F adalah kejadian munculnya sisi 4 pada dadu pertama, tunjukkan bahwa E_1 dan F adalah kejadian yang tidak bebas. Jika E_2 adalah kejadian muncul jumlah sisi kedua dadu bernilai 7, apakah E_2 dan F saling bebas?

Proposisi
Jika E dan F adalah dua kejadian saling bebas, maka E dan F^c juga saling bebas

Contoh 3.21
Dua dadu seimbang dilempar. Jika E adalah kejadian muncul jumlah sisi kedua dadi bernilai 7, F adalah kejadian muncul sisi 4 pada dadu pertama, dan G adalah kejadian muncul sisi 3 pada dadu kedua, berapa $P(E \mid FG)$? Apakah E dan FG saling bebas?

Definisi 3.4
Tiga kejadian E, F, dan G saling bebas jika

$$\begin{aligned} P(EFG) &= P(E)P(F)P(G) \\ P(EF) &= P(E)P(F) \\ P(EG) &= P(E)P(G) \\ P(FG) &= P(F)P(G) \end{aligned}$$

Contoh 3.22
Suatu percobaan dilakukan sebanyak n kali dan saling bebas. Setiap percobaan memiliki peluang kejadian sukses sebesar p, dan peluang kejadian gagal sebesar $1 - p$. Berapa peluang

a) sedikitnya muncul satu kejadian sukses

b) muncul tepat k kejadian sukses

Contoh 3.23
Suatu sistem terdiri atas n komponen yang disusun secara paralel, artinya sistem akan berfungsi jika sedikitnya ada satu komponen yang berfungsi. Setiap komponen saling bebas dan dapat berfungsi dengan peluang p_i, untuk i=1,2,...,n. Berapa peluang bahwa sistem tersebut berfungsi?