Bab 4

Peubah Acak

Definisi 4.1
Peubah acak adalah suatu fungsi dari ruang contoh ke bilangan nyata, $f : S \to R$

Contoh 4.1
Jika Y adalah peubah acak banyaknya sisi muka yang muncul pada pelemparan tiga sisi mata uang seimbang, tentukan Y dan peluang masing-masing nilainya.

Contoh 4.2
Tiga bola dipilih secara acak tanpa pemulihan dari sebuah wadah yang berisi 20 bola yang telah diberi nomor 1 sampai dengan 20. Dalam sebuah permainan, jika terpilih sedikitnya satu bola dengan nomor 17 atau lebih, maka Anda dianggap menang. Berapa peluang Anda akan menang dalam permainan tersebut?

Contoh 4.3
Suatu percobaan saling bebas, melempar satu koin mata uang dengan peluang munculnya sisi muka sebesar p, dan dilakukan terus sampai diperoleh sisi belakang (artinya, percobaan dihentikan jika diperoleh sisi belakang). Jika X adalah banyaknya percobaan dilakukan, $X = \{1, 2, ..., n\}$, tentukan peluang masing-masing nilai peubah acak X.

Contoh 4.4
Tiga bola diambil secara acak dari wadah yang berisi 3 bola putih, 3 bola merah, dan 5 bola hitam. Anggaplah ini merupakan permainan, dan Anda dianggap menang 1 dollar untuk setiap bola putih yang terpilih, dan kalah 1 dollar untuk setiap bola merah yang terpilih. Jika X adalah peubah acak total uang yang diperoleh dari permainan ini, tentukan peluang masing-masing nilainya.

4.1 Fungsi Sebaran

Definisi 4.2
Fungsi sebaran kumulatif (*cummulative distribution function*=cdf) atau sering disebut sebagai fungsi sebaran F dari peubah acak X didefinisikan untuk sembarang nilai b, $-\infty < b < \infty$, adalah

$$F(b) = P(X \leq b)$$

Dengan kata lain, $F(b)$ adalah peluang nilai peubah acak X lebih kecil atau sama dengan b. Beberapa properti dari fungsi sebaran F adalah

1. F adalah fungsi tidak turun, berarti jika $a < b$ maka $F(a) \leq F(b)$.
2. $F(b) = 1$ untuk $b \to \infty$.
3. $F(b) = 0$ untuk $b \to -\infty$.
4. F adalah kontinu kanan.

Berdasarkan properti dari fungsi sebaran F, maka untuk menghitung peluang $X < b$ dapat dilakukan dengan

$$\begin{aligned} P(X < b) &= P\left(\lim_{n\to\infty}\left\{X \leq b - \frac{1}{n}\right\}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(X \leq b - \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} F\left(b - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Contoh 4.5
Diketahui fungsi sebaran peubah acak X sebagai berikut:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

Gambarkan grafik $F(x)$ dan hitung $P(X < 3)$, $P(X = 1)$, $P(X > \frac{1}{2})$, dan $P(2 < X \leq 4)$.

4.2 Sebaran Diskret

Definisi 4.3
Peubah acak dimana semua nilai yang mungkin adalah tercacah, maka peubah acak disebut sebagai peubah acak diskret.

Untuk peubah acak X diskret, dapat ditentukan **fungsi massa peluang** atau disingkat **fmp**, $p(a)$, dari peubah acak X, yaitu

$$p(a) = P(X = a)$$

Untuk setiap nilai peubah acak $X = \{x_1, x_2, ...\}$, maka berlaku

$$\begin{aligned} p(x_i) &\leq 0 \text{ untuk setiap } i = 1, 2, ... \\ p(x) &= 0 \text{ untuk nilai } x \text{ lainnya} \\ \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) &= 1 \end{aligned}$$

Berikut adalah contoh fungsi massa peluang dari peubah acak X

x	0	1	2
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Fungsi sebaran dari peubah acak X tersebut adalah

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

yang merupakan **fungsi tangga**.

Contoh 4.6
Diketahui fungsi massa peluang peubah acak X sebagai berikut:

$$p(i) = \frac{c\lambda^i}{i!} \text{ untuk } i = 0, 1, 2, ... \text{ dan } \lambda > 0$$

Dapatkan $P(X = 0)$ dan $P(X > 2)$.

Contoh 4.7
Diketahui fungsi massa peluang dari peubah acak X

x	1	2	3	4
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Tentukan fungsi sebaran $F(X)$.

4.3 Nilai Harapan

Definisi 4.4
Jika X adalah peubah acak diskret yang mempunyai fungsi massa peluang $p(x)$, maka **nilai harapan** dari X, dinotasikan dengan $E(X)$, didefinisikan sebagai

$$E(X) = \sum_{x;p(x)>0} xp(x)$$

Sebagai contoh, jika

$$p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$$

maka

$$E(X) = 0p(0) + 1p(1) = 0(\frac{1}{2}) + 1(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

yang merupakan rata-rata dari kemunculan 0 dan 1. Namun demikian, jika

$$p(0) = \frac{1}{3} \text{ dan } p(1) = \frac{2}{3}$$

maka

$$E(X) = 0p(0) + 1p(1) = 0(\frac{1}{3}) + 1(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$$

dan ini merupakan rata-rata terboboti dari kemunculan 0 dan 1.

Contoh 4.8
Dapatkan $E(X)$ jika X adalah peubah acak pelemparan sebuah dadu seimbang.

Contoh 4.9
Kita sebut I sebagai fungsi indikator untuk kejadian A jika

$$I(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika kejadian } A \text{ muncul} \\ 0 & \text{jika kejadian } A^c \text{ muncul} \end{cases}$$

Dapatkan $E(I)$

Contoh 4.10
Kontestan quiz diberi dua pertanyaan 1 dan 2 yang harus dijawab secara berurutan, tetapi boleh mulai dari mana saja, dengan syarat pertanyaan berikutnya boleh dijawab jika sebelumnya dijawab dengan benar. Kontestan akan menerima uang 1 dollar jika dapat menjawab soal ke-i, $i = 1, 2$. Jika peluang kontestan dapat menjawab soal ke-i sebesar p_i, berapa harapan dia mendapatkan uang paling banyak jika dia memilih soal 1 sebagai soal yang pertama? Bagaimana kalau dia memilih soal 2 sebagai soal pertama?

Contoh 4.11
Sebanyak 120 siswa sekolah menaiki 3 bus menuju tempat konser musik klasik: 36 siswa di salah satu bus, 40 siswa di bus lainnya, dan 44 siswa di bus yang lain lagi. Ketika bus tiba, 1 dari 120 siswa dipilih secara acak. Jika X adalah peubah acak banyaknya siswa dalam bus dimana 1 siswanya terpilih, dapatkan $E(X)$.

Proposisi 4.1
Jika X adalah peubah acak diskret yang mempunyai fungsi massa peluang $p(x)$, dan $g(X)$ adalah fungsi dari peubah acak X, maka nilai harapan dari $g(X)$ adalah

$$E\{g(X)\} = \sum_i g(x_i)p(x_i)$$

Contoh 4.12
Misalkan X adalah peubah acak dengan nilai -1, 0, dan 1 dengan peluang masing-masing adalah P(X=-1)=0.2, p(X=0)=0.5, dan P(X=1)=0.3. Hitunglah $E(X^2)$.
Jawab

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (-1)^2P(X=-1) + (0)^2P(X=0) + (1)^2P(X=1) \\ &= (-1)^2(0.2) + (0)^2(0.5) + (1)^2(0.3) \\ &= 0.2 + 0 + 0.3 = 0.5 \\ &\neq (E(X))^2 = (0.1)^2 = 0.01 \end{aligned}$$

Corollary 4.1
Jika X adalah peubah acak dan a dan b adalah konstanta, maka

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

4.4 Ragam

Definisi 4.5
Jika X adalah adalah peubah acak dengan nilai tengah $E(X) = \mu$, maka **ragam** atau **variance** dari X, dinotasikan dengan $Var(X)$, didefinisikan sebagai

$$Var(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

Contoh 4.13
Hitung $Var(X)$ jika X menunjukkan kemunculan sisi dari pelemparan sebuah dadu seimbang.

Corollary 4.2
Jika X adalah peubah acak dan a dan b adalah konstanta, maka

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

Standard deviasi dari peubah acak X, dinotasikan dengan $SD(X)$ didefinisikan sebagai

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)}$$

4.5 Beberapa Sebaran Peubah Acak Diskret

4.5.1 Peubah Acak Bernoulli (p)

Misalnya ada tindakan melempar satu kali sekeping mata uang dimana peluang munculnya sisi muka, $P(\{M\}) = p$, $0 \leq p \leq 1$. Dengan demikian $S = \{M, B\}$. Jika X adalah banyaknya sisi muka yang muncul dari satu kali pelemparan tersebut, maka

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(\{B\}) = 1 - p \\ P(X = 1) &= P(\{M\}) = p \\ P(X \notin \{0, 1\}) &= 0 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, fmp dari peubah acak X adalah

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1 - p & \text{, untuk } x = 0 \\ p & \text{, untuk } x = 1 \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

atau dapat disederhanakan menjadi

$$f(x) = \begin{cases} p^x (1 - p)^{1-x} & \text{, untuk } x = 0, 1 \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Bukti

$$P(X \in S) = P(X \in \{0, 1\}) = P(X = 0) + P(X = 1) = (1 - p) + p = 1$$

4.5.2 Peubah Acak Binomial (n, p)

Misalnya ada tindakan melempar n kali sekeping mata uang dimana peluang munculnya sisi muka, $P(\{M\}) = p$, $0 \leq p \leq 1$. Jika X adalah banyaknya sisi muka yang muncul dari n kali pelemparan tersebut, maka

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} & \text{, untuk } x = 0, 1, ..., n \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa kejadian Binomial merupakan kejadian Bernoulli yang diulang sebanyak n kali dan saling bebas.

Bukti

$$\begin{aligned} P(X \in S) &= P(X \in \{0, 1, ..., n\}) \\ &= \sum_{x=0}^{n} P(X = x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \\ &= (p + 1 - p)^n = 1 \end{aligned}$$

4.5.3 Peubah Acak Uniform Diskret (N)

Misalnya ada tindakan mengambil satu bola secara acak dari wadah yang berisi N bola yang diberi nomor $1, 2, .., N$ dengan peluang masing-masing bola terambil adalah sama. Jika X adalah nomor atau nilai bola yang terambil, maka

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1/N & \text{, untuk } x = 1, 2, ..., N \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

4.5.4 Peubah Acak Geometrik (p)

Misalnya ada tindakan melempar sekeping mata uang dengan $P(\{M\}) = p$ $(0 \leq p \leq 1)$ berkali-kali sampai muncul sisi muka (M). Jika X adalah banyaknya lemparan yang diperlukan sampai muncul sisi M, maka

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & \text{, untuk } x = 1, 2, ... \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

4.5.5 Peubah Acak Poisson (λ)

Misalnya ada tindakan melempar sekeping mata uang dengan $P(\{M\}) = p \to 0$ sebanyak n kali $(n \to \infty)$. Jika X adalah banyaknya sisi muka yang muncul dari takhingga kali pelemparan tersebut, maka

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x (1-p)^{n-x} & \text{, untuk } x = 0, 1, ..., n \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Misalkan

$$\lim_{n\to\infty, p\to 0} np = \lambda$$

maka dapat dibuktikan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

sehingga diperoleh fungsi massa peluang

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{, untuk } x = 0, 1, 2, ... \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

4.5.6 Peubah Acak Binomial Negatif (r, p)

Misalnya ada tindakan melempar sekeping mata uang dengan $P(\{M\}) = p$ $(0 \leq p \leq 1)$ berkali-kali sampai muncul sisi muka (M) sebanyak r kali. Jika X adalah banyaknya lemparan yang diperlukan sampai muncul sisi M sebanyak r kali $(r = 1, 2, 3, ...)$, maka

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x-1 \\ r-1 \end{pmatrix} p^r (1-p)^{x-r} & \text{, untuk } x = r, r+1, r+2, ... \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Ambil $y = x - r$ atau $x = y + r$ maka diperoleh

$$f(y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} y+r-1 \\ y \end{pmatrix} p^r (1-p)^{y} & \text{, untuk } y = 0, 1, 2, ... \\ 0 & \text{, untuk } y \text{ lainnya} \end{cases}$$

4.5.7 Peubah Acak Hipergeometrik

Misalkan ada tindakan mengambil secara acak (tanpa pemulihan) n bola dari wadah yang megandung N bola yang terdiri atas m bola warna putih (dan $N-m$ bola warna lainnya). Jika X adalah peubah acak banyaknya bola putih yang terambil, maka

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-m \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} & \text{, untuk } x = 0, 1, 2, ...n \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Ringkasan

Peubah Acak	Properti
Bernoulli(p)	$f(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \text{, utk } x = 0, 1 \\ 0 & \text{, utk } x \text{ lainnya} \end{cases}$ $E(X) = p$, $var(X) = p(1-p)$
Binomial(n, p)	$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} & \text{, utk } x = 0, 1, ..., n \\ 0 & \text{, utk } x \text{ lainnya} \end{cases}$ $E(X) = np$, $var(X) = np(1-p)$
Uniform Diskret (N)	$f(x) = \begin{cases} 1/N & \text{, utk } x = 1, 2, ..., N \\ 0 & \text{, utk } x \text{ lainnya} \end{cases}$ $E(X) = (N+1)/2$, $var(X) = (N+1)(N-1)/12$
Geometrik(p)	$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & \text{, utk } x = 1, 2, ... \\ 0 & \text{, utk } x \text{ lainnya} \end{cases}$ $E(X) = 1/p$, $var(X) = (1-p)/p^2$
Binomial Negatif (r, p)	$f(x) = \begin{cases} \binom{x+r-1}{x} p^r(1-p)^x & \text{, untuk } x = 0, 1, 2, ... \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$ $E(X) = r(1-p)/p$, $var(X) = r(1-p)/p^2$
Poisson(λ)	$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{, utk } x = 0, 1, 2, ... \\ 0 & \text{, utk } x \text{ lainnya} \end{cases}$ $E(X) = \lambda$, $var(X) = \lambda$
Hipergeometrik	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \text{, untuk } x = 0, 1, 2, ...n \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$

4.6 Aspek Komputasi

Sebaran Binomial

Jika X adalah peubah acak binomial dengan parameter (n, p) maka fungsi sebarannya adalah

$$P(X \leq i) = \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ untuk } i = 0, 1, ..., n$$

Terdapat hubungan antara $P(X = k+1)$ dan $P(X = k)$, yaitu

$$p(X = k+1) = \frac{p}{1-p} \frac{n-k}{k+1} P(X = k)$$

Formula ini merupakan fungsi rekursif yang digunakan untuk melakukan komputasi (program komputer) menghitung nilai peluang dari sebaran Binomial.

Contoh 4.14

Misalkan X adalah peubah acak Binomial dengan parameter $n = 6$ dan $p = 0.4$. Maka untuk menghitung $P(X = 6)$ dimulai dari $P(X = 0) = (1 - 0.4)^6$ dan selanjutnya secara rekursif dapat diperoleh $p(X = 6)$.

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= (0.6)^6 \approx 0.0467 \\
P(X = 1) &= \left(\frac{0.4}{0.6}\right)\left(\frac{6}{1}\right) P(X = 0) \approx 0.1866 \\
P(X = 2) &= \left(\frac{0.4}{0.6}\right)\left(\frac{5}{2}\right) P(X = 1) \approx 0.3110 \\
&\ldots \\
&\ldots \\
P(X = 6) &= \left(\frac{0.4}{0.6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) P(X = 5) \approx 0.0041
\end{aligned}$$

Sebaran Poisson

Jika X adalah peubah acak Poisson dengan parameter λ, maka

$$\frac{P(X = i+1)}{P(X = i)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i+1}/(i+1)!}{e^{-\lambda}\lambda^i/i!} = \frac{\lambda}{i+1}$$

sehingga

$$P(X = i+1) = \left(\frac{\lambda}{i+1}\right) P(X = i)$$

yang merupakan fungsi rekursif untuk melakukan komputasi (program komputer) menghitung nilai peluang dari sebaran Poisson.

Contoh 4.15
Lima koin dilempar. Jika kemunculan masing-masing koin saling bebas, tentukan fungsi massa peluang kemunculan sisi muka.

Contoh 4.16
Diketahui bahwa sekrup yang diproduksi pabrik tertentu akan rusak dengan peluang 0.01, bebas satu sama lain. Pabrik menjual sekrup dalam satu kotak berisi 10. Jika sedikitnya 1 dari 10 sekrup tersebut rusak, pabrik bersedia menggantinya. Berapa peluang sekrup yang dijual akan dikembalikan oleh pembeli?

Contoh 4.17
Suatu sistem komunikasi terdiri atas 5 komponen yang masing-masing secara bebas dapat berfungsi dengan peluang p. Sistem secara keseluruhan akan berfungsi dengan baik jika sedikitnya separuh dari 5 komponen tersebut berfungsi. Berapa peluang sistem komunikasi tersebut dapat berfungsi dengan baik?

Contoh 4.18
Misalkan banyaknya salah ketik pada buku ini menyebar Poisson dengan parameter $\lambda = \frac{1}{2}$. Hitung peluang terdapat sedikitnya 1 salah ketik di halaman ini.

Contoh 4.19
Peluang suatu barang yang diproduksi oleh pabrik tertentu rusak sebesar 0.1. Dapatkan peluang 10 contoh barang yang diproduksi paling banyak ada 1 yang rusak.

Contoh 4.20
Diketahui gempa bumi terjadi di bagian timur Indonesia dengan $\lambda = 2$ per minggu. Dapatkan peluang sedikitnya terjadi 3 kali gempa bumi selama dua minggu berikutnya.

Contoh 4.21
Suatu perusahaan membeli 10 lot komponen elektronik. Sudah menjadi prosedur baku, perusahaan akan memeriksa barang yang dibeli dengan mengambil 3 komponen secara acak, dan dapat menerima barang tersebut jika semuanya dari 3 komponen tersebut tidak ada yang rusak. Jika diketahui 30 persen dari lot terdapat 4 komponen yang rusak, dan 70 persen lot hanya ada 1 yang rusak, tentukan peluang komponen elektronik yang dibeli ditolak oleh perusahaan.