Bab 6

Sebaran Peubah Acak Bersama

6.1 Peubah Acak Ganda

Misalnya terdapat suatu tindakan pelemparan sekeping mata uang seimbang sebanyak 3 kali, dan X adalah peubah acak banyaknya sisi muka yang muncul dari 3 lemparan, serta Y adalah peubah acak banyaknya sisi muka yang muncul dari 2 lemparan terakhir. Maka dapat ditentukan $X = \{0, 1, 2, 3\}$ dan $Y = \{0, 1, 2\}$. Fungsi massa peluang dari peubah acak X dan Y secara bersama dapat ditentukan sebagai berikut:

$$P[(X,Y) = (x,y) = f(x,y) = \begin{cases} 1/8 & \text{untuk } (x,y) = (0,0),(1,0),(2,2),(3,2) \\ 2/8 & \text{untuk } (x,y) = (1,1),(2,1) \\ 0 & \text{untuk } (x,y) \text{ lainnya} \end{cases}$$

atau dapat juga disajikan dalam bentuk tabel seperti berikut:

	Y			
X	0	1	2	$f_X(x)$
0	1/8	0	0	1/8
1	1/8	2/8	0	3/8
2	0	2/8	1/8	3/8
3	0	0	1/8	1/8
$f_Y(y)$	2/8	4/8	2/8	1

Definisi 6.1.1.
Peubah acak ganda-n, yaitu $(X_1, X_2, ..., X_n)$ adalah suatu fungsi dari ruang contoh S ke ruang bilangan nyata berdimensi n (R^n), $n = 1, 2, 3, ...$

Definisi 6.1.2.
Ambil peubah acak ganda-2 diskret (X, Y). Suatu fungsi R^2 ke R berikut:

$$f(x,y) = P[(X,Y) = (x,y)] \text{ untuk } (x,y) \in R^2$$

disebut fungsi massa peluang (fmp) dari peubah acak ganda-2 (X, Y)

$$(X,Y) = \{(x,y); f(x,y) > 0\}$$

Contoh 1a. Dari ilustrasi sebelumnya, hitunglah (a) $P(X + Y = 2)$, (b) $P(X + Y > 1$, (c) $P(\mid X - Y \mid < 2)$.

Definisi 6.1.3.
Nilai harapan dari suatu fungsi dari peubah acak ganda-2 diskret (X, Y) adalah

$$E[g(X,Y)] = \sum_{(x,y)\in(X,Y)} g(x,y)f(x,y)$$

Contoh 1b. Dari ilustrasi sebelumnya, hitunglah $E(XY)$.

Teorema 6.1.1.
Ambil peubah acak diskret (X, Y) dengan fmp $f(x, y)$ untuk $(x, y) \in R^2$.

(i) Fmp marjinal dari peubah acak X adalah

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_{y\in\{y;f(x,y)>0\}} f(x,y), \text{ untuk } x \in R$$

(ii) Fmp marjinal dari peubah acak Y adalah

$$f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x\in\{x;f(x,y)>0\}} f(x,y), \text{ untuk } y \in R$$

Contoh 1c. Dari ilustrasi sebelumnya, tentukan fmp marjinal $f_X(x)$ dan $f_Y(y)$, serta $E[X]$ dan $E[Y]$.

Definisi 6.1.4.
Kovarian dari peubah acak diskret (X, Y) adalah

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Bila $X = Y$ maka

$$Cov(X,Y) = E[X^2] - (E[X])^2 = Var(X).$$

Koefisien korelasi dari peubah acak (X, Y) adalah

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

dan $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$.

Contoh 1d. Dari ilustrasi sebelumnya, hitunglah $Cov(X, Y)$ dan $\rho(X, Y)$.

6.2 Peubah Acak Kontinu Ganda-2

Definisi 6.2.1.
Ambil peubah acak kontinu ganda-2 (X, Y). Suatu fungsi $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ untuk $(x, y) \in R^2$ disebut fungsi kepekatan peluang (fkp) bersama dari peubah acak (X, Y) jika untuk setiap himpunan $A \subseteq R^2$ berlaku

$$P[(X,Y) \in A] = \int\int_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x, y) dxdy.$$

Bila $A = R^2$ maka

$$P[(X,Y) \in A] = \int\int_{(x,y)\in R^2} f_{X,Y}(x, y) dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dxdy = 1.$$

Definisi 6.2.2.
Fkp marjinal dari peubah acak X adalah

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy, \text{ untuk } x \in R$$

Fkp marjinal dari peubah acak Y adalah

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx, \text{ untuk } y \in R.$$

Contoh 2. Peubah acak kontinu (X, Y) memiliki fungsi kepekatan peluang sebagai berikut:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 4xy & \text{untuk } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{untuk } (x, y) \text{ lainnya} \end{cases}$$

Berapa (a) $P(X > Y)$, (b) $P(Y >| X - \frac{1}{2} |)$, (c) $P(XY < \frac{1}{2})$, (d) fkp marjinal dari X dan Y?

6.3 Fungsi Sebaran

Fungsi sebaran dari peubah acak ganda-2 (X, Y) adalah:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P[X \leq x \cap Y \leq y], \text{untuk } (x, y) \in R^2 \\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u, v)_{d_u d_v}. \end{aligned}$$

Contoh 3a. Diketahui fungsi kepekatan peluang bersama peubah acak (X, Y) sebagai berikut:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & \text{untuk } 0 < x < 2, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{untuk } (x, y) \text{ lainnya} \end{cases}$$

Dapatkan fungsi sebaran $F(x, y)$.

Contoh 3b. Diketahui fungsi kepekatan peluang bersama peubah acak (X, Y) sebagai berikut:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 0 < x < 2, 0 < y < 1 - x/2 \\ 0 & \text{untuk } (x, y) \text{ lainnya} \end{cases}$$

Dapatkan fungsi sebaran $F(x, y)$.

6.4 Peubah Acak Ganda-2 Campuran

6.4.1 Peubah acak X kontinu, Y diskret

Sebagai ilustrasi, misalnya fmp/fkp dari peubah acak (X, Y) sebagai berikut:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/6 & \text{untuk } 0 < x < 1, y = 1 \\ 2/6 & \text{untuk } 0 < x < 1, y = 2 \\ 3/12 & \text{untuk } \frac{1}{2} < x < 2\frac{1}{2}, y = 3 \\ 0 & \text{untuk } (x, y) \text{ lainnya} \end{cases}$$

Fkp marjinal dari peubah acak X adalah:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2} & \text{untuk } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} = \frac{3}{4} & \text{untuk } \frac{1}{2} < x < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{untuk } 1 < x < 2\frac{1}{2} \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Fkp marjinal dari peubah acak Y adalah:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} & \text{untuk } y = 1 \\ \int_0^1 \frac{2}{6} dx = \frac{2}{6} & \text{untuk } y = 2 \\ \int_{\frac{1}{2}}^{2\frac{1}{2}} \frac{3}{12} dx = \frac{1}{2} & \text{untuk } y = 3 \\ 0 & \text{untuk } y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Contoh 4a. Berdasarkan ilustrasi sebelumnya, tentukan (a) $Cov(X, Y)$ dan (b) $\rho(X, Y)$.

6.4.2 Peubah acak X diskret, Y kontinu

Sebagai ilustrasi, misalnya fmp/fkp dari peubah acak (X, Y) sebagai berikut:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} y & \text{untuk } x = 1, 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2}y & \text{untuk } x = 2, 0 < y < 1 \\ \frac{1}{8}y & \text{untuk } x = 3, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{untuk } (x, y) \text{ lainnya} \end{cases}$$

Fkp marjinal dari peubah acak X adalah:

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^1 ydy = \frac{1}{2} & \text{untuk } x = 1 \\ \int_0^1 \frac{1}{2}ydy = \frac{1}{4} & \text{untuk } x = 2 \\ \int_0^2 \frac{1}{8}ydy = \frac{1}{4} & \text{untuk } x = 3 \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Fkp marjinal dari peubah acak Y adalah:

$$f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}y + \frac{1}{8}y = \frac{13}{8}y & \text{untuk } 0 < y < 1 \\ \frac{1}{8}y & \text{untuk } 1 < y < 2 \\ 0 & \text{untuk } y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Contoh 4b. Berdasarkan ilustrasi sebelumnya, tentukan (a) $Cov(X, Y)$ dan (b) $\rho(X, Y)$.

6.5 Sebaran Bersyarat dan Dua Peubah Acak Bebas

Definisi 6.5.1.
Ambil peubah acak ganda-2 (X, Y) yang diskret atau kontinu dengan fmp/fkp bersama $f_{X,Y}(x, y)$ untuk $(x, y) \in R$, serta $f_X(x)$ untuk $x \in R$ dan $f_Y(y)$ untuk $y \in R$ masing-masing sebagai fmp/fkp marjinal dari peubah acak X dan Y.

a) Fmp/fkp bersyarat dari peubah acak Y bila diketahui $X = x$ adalah suatu fungsi dari y sebagai berikut:

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}, \text{ untuk } y \in R \text{ asal } f_X(x) > 0$$

b) Fmp/fkp bersyarat dari peubah acak X bila diketahui $Y = y$ adalah suatu fungsi dari x sebagai berikut:

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}, \text{ untuk } x \in R \text{ asal } f_Y(y) > 0.$$

Dari ilustrasi di awal bab ini, maka fmp bersyarat dari peubah acak Y bila diketahui $X = 1$ adalah

$$f_{Y|X}(y \mid 1) = \frac{f_{X,Y}(1, y)}{f_X(1)} = \begin{cases} \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3} & \text{, untuk } y = 0 \\ \frac{2/8}{3/8} = \frac{2}{3} & \text{, untuk } y = 1 \\ 0 & \text{, untuk } y \text{ lainnya} \end{cases}$$

dan fmp bersyarat dari peubah acak X bila diketahui $X = 3$ adalah

$$f_{Y|X}(y \mid 3) = \frac{f_{X,Y}(3, y)}{f_X(3)} = \begin{cases} \frac{1/8}{1/8} = 1 & \text{, untuk } y = 2 \\ 0 & \text{, untuk } y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Contoh 5a. Peubah acak (X, Y) kontinu dengan fkp bersama sebagai berikut:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x + 2y) & \text{, untuk } 0 < x < 2, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{, untuk } (x, y) \text{ lainnya} \end{cases}$$

Dapatkan (a) fkp bersyarat dari peubah acak Y bila diketahui $X = 1$, (b) fkp bersyarat dari peubah acak X bila diketahui $Y = \frac{2}{3}$.

Definisi 6.5.2.
Ambil peubah acak ganda-2 (X, Y) yang diskret/kontinu/campuran dengan fmp/fkp bersama $f_{X,Y}(x, y)$ untuk $(x, y) \in R$, serta $f_X(x)$ untuk $x \in R$ dan $f_Y(y)$ untuk $y \in R$ masing-masing sebagai fmp/fkp marjinal dari peubah acak X dan Y. Peubah acak X dan peubah acak Y disebut **bebas** jika

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x).f_Y(y), \text{ untuk semua } (x, y) \in R^2.$$

Contoh 5b. Peubah acak (X, Y) kontinu dengan fkp bersama sebagai berikut:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} xy & \text{, untuk } 0 < x < 2, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{, untuk } (x, y) \text{ lainnya} \end{cases}$$

Apakah X dan Y saling bebas?