Bab 5

Peubah Acak Kontinu

5.1 Pendahuluan

Definisi 5.1. Peubah acak adalah suatu fungsi dari ruang contoh S ke R (himpunan bilangan nyata)

- Peubah acak X bersifat **diskret** jika $F(x)$ adalah fungsi tangga.
- Peubah acak X bersifat **kontinu** jika $F(x)$ adalah fungsi kontinu dari x.

Dengan kata lain, X disebut peubah acak kontinu jika ada fungsi non-negatif f yang didefinisikan untuk semua bilangan nyata $x \in (-\infty, \infty)$, bahwa untuk setiap bilangan nyata B berlaku

$$P(X \in B) = \int_B f(x)_{dx} \tag{5.1}$$

Fungsi f disebut sebagai **fungsi kepekatan peluang (fkp)** atau *probability density function (pdf)* dari peubah acak X. Persamaan (5.1) menyatakan bahwa peluang X berada pada daerah B dapat diperoleh dengan mengintegralkan pdf pada daerah B. Berdasarkan definisi tentang peluang, maka

$$P\{X \in (-\infty, \infty)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)_{dx} = 1$$

Dengan demikian, untuk sembarang $B = [a, b]$, maka persamaan (5.1) menjadi

$$P(X \in B) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)_{dx} \tag{5.2}$$

Jika $a = b$ pada persamaan (5.2), maka diperoleh

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)_{dx} = 0.$$

Dengan demikian, untuk peubah acak kontinu, berlaku

$$P(X < a) = P(X \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x)_{dx}.$$

Definisi 5.1. Fungsi kepekatan peluang (fkp) dari peubah acak kontinu X adalah suatu fungsi $f_X(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in R$ yang memenuhi syarat berikut:

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \text{ untuk setiap } x \in R$$

Ini berarti bahwa

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \text{ asal p.a } X \text{ kontinu pada } X = x$$

Contoh 1a. Misalkan X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

a) Berapa nilai C?

b) Tentukan $P(X > 1)$

Contoh 1b. Suatu komputer berfungsi dengan baik sebelum mengalami hang dapat ditentukan dalam satuan jam, mengikuti fungsi kepekatan peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Berapa peluang bahwa:

a) sebuah komputer akan berfungsi dengan baik antara 50 dan 150 jam sebelum mengalami hang?

b) akan berfungsi dengan baik kurang dari 100 jam?

Contoh 1c. Daya tahan dalam jam suatu tabung radio adalah suatu peubah acak yang mempunyai fungsi kepekatan peluang

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 100 \\ 100/x^2 & x > 100 \end{cases}$$

Berapa peluang bahwa 2 dari 5 tabung radio harus diganti pada 150 jam pertama beroperasi?

5.2 Nilai Harapan dan Ragam

Jika X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang

$$f(x)dx \simeq P(x \leq X \leq x + dx) \text{ untuk } dx \text{ yang sangat kecil}$$

Hal ini mengakibatkan bahwa nilai harapan dari peubah acak kontinu X adalah

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

dan

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

Contoh 2a. Dapatkan $E[X]$ dan $Var(X)$ jika diketahui fungsi kepekatan peluang dari peubah acak X adalah

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Contoh 2b. Fungsi kepekatan peluang dari peubah acak X adalah

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Dapatkan $E[e^x]$.

5.3 Peubah Acak Seragam Kontinu

Suatu peubah acak dikatakan menyebar seragam kontinu pada selang $(0, 1)$ jika fkp nya adalah

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Secara umum, X adalah peubah acak seragam pada selang (α, β) jika fkp nya adalah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \alpha < x < \beta \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Karena $F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, maka dapat diperoleh fungsi sebaran dari peubah acak seragam pada selang (α, β) adalah

$$F(a) = \begin{cases} 0 & a \leq \alpha \\ \frac{a-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha < x < \beta \\ 1 & a \geq \beta \end{cases}$$

Contoh 3a. Misal X menyebar seragam pada selang (α, β). Dapatkan $E[X]$ dan $Var(X)$.

Contoh 3b. Jika X menyebar seragam pada selang $(0, 10)$, hitung peluang (a) $X < 3$, (b) $X > 6$, dan (c) $3 < X < 8$.

Contoh 3c. Bus datang pada pemberhentian setiap selang 15 menit pada pukul 7 pagi. Jadi, bus datang pada pukul 7, 7:15, 7:30, dan seterusnya. Jika penumpang datang menyebar seragam antara pukul 7 hingga 7:30, dapatkan peluang bahwa penumpang akan menunggu bus:

a) kurang dari 5 menit

b) lebih dari 10 menit.

5.4 Peubah Acak Normal

Peubah acak X merupakan peubah acak normal (atau X menyebar normal) dengan parameter μ dan σ^2 jika fungsi kepekatan peluang dari X adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \text{ untuk } -\infty < x < \infty$$

Nilai harapan dari X adalah $E[X] = \mu$ dan ragam X adalah $Var(X) = \sigma^2$. Peubah acak X menyebar normal dapat dituliskan sebagai:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Jika diketahui bahwa $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, maka dapat ditunjukkan bahwa $Z \sim N(0, 1)$, dan

$$P(X < x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz$$

yang nilainya tercantum pada Tabel 5.1. Oleh karena itu, fungsi sebaran X dapat dituliskan sebagai:

$$F_X(x) = P(X \leq a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Contoh 4a. Jika X adalah peubah acak yang menyebar normal dengan parameter $\mu = 3$ dan $\sigma^2 = 9$, dapatkan:

a) $P(2 < X < 5)$

b) $P(X > 0)$

c) $P(\mid X - 3 \mid > 6)$.

Contoh 4b. Suatu hasil ujian sering digunakan untuk menentukan huruf mutu dengan menggunakan sebaran normal. Seseorang akan diberi huruf mutu A jika hasil skor ujiannya lebih besar dari $\mu + \sigma$, B jika skor ujian antara μ dan $\mu + \sigma$, C jika antara $\mu - \sigma$ dan μ, D jika antara $\mu - 2\sigma$ dan $\mu - \sigma$, dan E jika skor ujian kurang dari $\mu - 2\sigma$. Berapa persen mahasiswa yang mendapat huruf mutu masing-masing?

TABLE 5.1 AREA $\Phi(x)$ UNDER THE STANDARD NORMAL CURVE TO THE LEFT OF x

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Contoh 4c. Misalkan suatu pesan biner 0 atau 1 di-transmit melalui kabel dari lokasi A ke lokasi B. Untuk mengurangi kesalahan, maka data nilai 2 dikirim jika pesan binernya adalah 1, dan nilai -2 dikirim jika pesan binernya adalah 0. Jika $x, x = \pm 2$, nilai yang dikirim pada lokasi A, maka R adalah nilai yang diterima pada lokasi B yaitu $R = x + N$, dimana N adalah kanal gangguan. Ketika pesan diterima pada lokasi B, penerima akan menterjemahkan pesan dengan aturan:

jika $R \geq 0.5$ maka pesan diartikan sebagai 1, dan jika $R < 0.5$ maka pesan diartikan sebagai 0. Jika kanal gangguan menyebar menurut sebaran normal baku, maka berapa peluang kesalahan yang terjadi.

5.4.1 Pendekatan Normal untuk Sebaran Binomial

Teorema Limit DeMoivre-Laplace
Jika S_n melambangkan banyaknya kejadian sukses pada n percobaan yang saling bebas, masing-masing percobaan memiliki peluang sukses sebesar p, maka untuk setiap $a < b$,

$$P\left\{a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right\} \to \phi(b) - \phi(a)$$

untuk $n \to \infty$.

Contoh 4d. Misal X menunjukkan banyaknya sisi muka muncul pada pelemparan koin sebanyak 40 kali. Dapatkan peluang bahwa $X = 20$.

Contoh 4e. Ukuran ideal kelas tahun pertama di suatu perguruan tinggi adalah 150 mahasiswa. Dari pengalaman sebelumnya diketahui bahwa hanya 30 persen yang diterima dari 450 pendaftar. Hitung peluang bahwa lebih dari 150 mahasiswa tahun pertama yang diterima di perguruan tinggi ini.

5.5 Peubah Acak Eksponensial

Suatu peubah acak kontinu yang memiliki fungsi kepekatan peluang

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

disebut peubah acak eksponensial dengan parameter λ. Fungsi sebaran kumulatif $F(a)$ dari peubah acak eksponensial adalah

$$F(a) = 1 - e^{-\lambda a} \text{ untuk } a \geq 0.$$

Contoh 5a. Misal X adalah peubah acak eksponensial dengan parameter λ. Hitung (a) $E[X]$, dan (b) $Var(X)$.
Contoh 5b. Katakanlah bahwa lama seseorang menelepon dalam menit merupakan peubah acak eksponensial dengan parameter $\lambda = \frac{1}{10}$. Jika seseorang datang ke telepon umum sebelum Anda, dapatkan peluang bahwa Anda akan menunggu untuk menggunakan telepon umum:

a) lebih dari 10 menit

b) antara 10 dan 20 menit.

5.6 Sebaran Peubah Acak Kontinu Lainnya

5.6.1 Sebaran Gamma

Suatu peubah acak dikatakan mempunyai sebaran Gamma dengan parameter (α, β) untuk $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$ jika fkp nya adalah:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

dimana $\Gamma(\alpha)$, disebut fungsi gamma, didefinisikan sebagai

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dy$$

dan dapat ditunjukkan bahwa $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$, dan $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Contoh 6a. Misal X adalah peubah acak gamma dengan parameter t dan λ. Hitung $E[X]$.

5.6.2 Sebaran Weibull

Fungsi sebaran Weibull dengan parameter ν, α, dan β adalah

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \nu \\ 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^\beta\right\} & x > \nu \end{cases}$$

Oleh karena itu, fungsi kepekatan peluangnya adalah

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \nu \\ \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^\beta\right\} & x > \nu \end{cases}$$

5.6.3 Sebaran Beta

Peubah acak dikatakan mempunyai sebaran beta jika fkp nya adalah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{selainnya} \end{cases}$$

dimana

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx.$$

5.7 Sebaran dari Fungsi Peubah Acak

Jika diketahui sebaran dari X, maka dapat ditentukan sebaran dari $g(X)$.
Contoh 7a. Misal X adalah peubah acak seragam pada selang $(0, 1)$. Dapatkan sebaran dari peubah acak $Y = X^n$.

Teorema 7.1. Misal X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang $f_X(x)$. Anggaplah $g(x)$ fungsi monoton dan merupakan fungsi yang differentiable. Maka peubah acak $Y = g(X)$ mempunyai fungsi kepekatan peluang

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[g^{-1}(y)] \mid \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \mid & \text{jika } y = g(x) \text{ untuk beberapa } x \\ 0 & \text{jika } y \neq g(x) \text{ untuk semua } x \end{cases}$$

dimana $g^{-1}(y)$ adalah fungsi kebalikan dari $y = g(x)$.
Untuk peubah acak diskret berlaku:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[g^{-1}(y)] & \text{jika } y = g(x) \text{ untuk beberapa } x \\ 0 & \text{jika } y \neq g(x) \text{ untuk semua } x \end{cases}$$

Contoh 7b. Misal X adalah peubah acak bernoulli(p). Dapatkan sebaran dari $Y = 2X + 1$.

Contoh 7c. Misal X adalah peubah acak dengan fungsi massa peluang

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{untuk } x = 1, 2, ..., 6 \\ 0 & \text{selainnya} \end{cases}$$

Dapatkan sebaran $Y =\mid X - 3\frac{1}{2} \mid$.

Contoh 7d. Misal X adalah peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{untuk } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{selainnya} \end{cases}$$

Dapatkan sebaran $Y = X^2 + 1$.